Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет

информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина «Прикладные задачи математического анализа»

«К защите допустить»

Руководитель курсовой работы канд. ф.-м. н., доцент

­\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В. Я. Анисимов

\_\_\_.\_\_\_\_.2024

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

к курсовой работе

на тему:

**«ОСНОВНЫЕ ВИДЫ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ»**

БГУИР КП 6-05 0612 02 01 ПЗ

Выполнил студент группы 353504

АНТОНОВА Лидия Сергеевна

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись студента)

Курсовая работа представлена на проверку \_\_\_.\_\_\_\_.2024

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись студента)

Минск 2024

**Содержание**

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc183602468)

[1 Основные понятия и определения 4](#_Toc183602469)

[1.1 Функция и ее свойства 4](#_Toc183602470)

[1.2 Ортогональная система функций 9](#_Toc183602471)

[1.3 Ряд Фурье 10](#_Toc183602472)

[2 История исследования рядов Фурье 14](#_Toc183602473)

[3 Виды сходимости ряда Фурье 17](#_Toc183602474)

[3.1 Поэлементная сходимость 17](#_Toc183602475)

[3.2 Сходимость в среднем 20](#_Toc183602476)

[3.3 Равномерная сходимость 22](#_Toc183602477)

[3.4 Сходимость в смысле квадратичной интегрируемости 23](#_Toc183602478)

[4 Критерии сходимости рядов Фурье 24](#_Toc183602479)

[4.1 Критерий Коши 24](#_Toc183602480)

[4.2 Критерий Дирихле 24](#_Toc183602481)

[4.3 Критерий Бесовича 25](#_Toc183602482)

[5 Примеры и приложения 26](#_Toc183602483)

[5.1 Примеры рядов Фурье 26](#_Toc183602484)

[5.2 Применение в различных областях 27](#_Toc183602485)

[6 Проблемы и трудности сходимости 31](#_Toc183602486)

[6.1 Парадокс Гиббса 31](#_Toc183602487)

[6.2 Особенности сходимости для непрерывных функций 32](#_Toc183602488)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 33](#_Toc183602489)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 34](#_Toc183602490)

# ВВЕДЕНИЕ

Ряды Фурье представляют собой один из важнейших инструментов математического анализа, используемых для представления периодических функций в виде суммы синусоидальных компонентов. Их применение охватывает широкий спектр областей, включая физику, инженерию, обработку сигналов и теорию информации. Понимание сходимости рядов Фурье имеет решающее значение для правильного анализа и интерпретации результатов, поскольку различные виды сходимости могут существенно влиять на свойства рассматриваемых функций.

Целью данной работы является исследование основных видов сходимости рядов Фурье, а также анализ их значимости в контексте математического анализа и приложений. Важность данной темы обусловлена тем, что различные виды сходимости позволяют глубже понять поведение рядов Фурье при различных условиях, а также выявить их ограничения и особенности. Это знание необходимо не только для теоретических изысканий, но и для практических приложений в реальных задачах.

Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд задач. Во-первых, следует рассмотреть основные определения и понятия, связанные с рядами Фурье и их сходимостью. Во-вторых, необходимо проанализировать исторический контекст развития темы, что поможет лучше понять эволюцию исследований в данной области. В-третьих, важным аспектом является изучение различных видов сходимости рядов Фурье, таких как поэлементная сходимость, сходимость в среднем, сходимость по Лебегу и сходимость в смысле квадратичной интегрируемости. Кроме того, потребуется рассмотреть критерии сходимости, что позволит классифицировать функции по их поведению при разложении в ряд Фурье.

Также стоит уделить внимание примерам и приложениям рядов Фурье, чтобы проиллюстрировать их практическое применение и важность. Завершающим этапом исследования будет анализ проблем и трудностей, связанных со сходимостью рядов Фурье, включая такой известный феномен, как парадокс Гиббса. Таким образом, данная работа не только углубит знания о рядах Фурье, но и поможет выявить сложные аспекты, требующие дальнейшего изучения.

# 1 Основные понятия и определения

В данной главе будут рассмотрены ключевые понятия и определения, связанные с рядами Фурье и их сходимостью. Понимание этих терминов является основой для дальнейшего анализа и изучения различных видов сходимости, а также их применения в математическом анализе и других научных дисциплинах. Ряды Фурье позволяют представлять функции в виде суммы гармонических компонентов, что является необходимым для решения многих практических задач, таких как обработка сигналов и анализ периодических явлений.

Таким образом, эта глава создаст необходимую теоретическую базу для дальнейшего анализа и обсуждения различных аспектов рядов Фурье в следующих разделах работы.

## 1.1 Функция и ее свойства

Пусть X и Y — какие-то множества.

Говорят, что имеется **функция**, определенная на X со значениями в Y, если в силу некоторого закона f каждому элементу x ∈ X соответствует элемент y ∈ Y.

В этом случае множество X называется областью определения функции; символ x его общего элемента — аргументом функции или независимой переменной; соответствующий конкретному значению x0 ∈ X аргумента x элемент y0 ∈ Y называют значением функции на элементе x0 или значением функции при значении аргумента x = x0 и обозначают через f(x0). При изменении аргумента x ∈ X значения y = f(x) ∈ Y, вообще говоря, меняются в зависимости от значений x. По этой причине величину y = f(x) часто называют зависимой переменной.

Множество

f (X) := { y ∈ Y | ∃x ((x ∈ X) ∧ ( y = f(x) ))}

всех значений функции, которые она принимает на элементах множества X, будем называть множеством значений или областью значений функции. В зависимости от природы множеств X и Y термин «функция» в различных отделах математики имеет ряд полезных синонимов: отображение, преобразование, морфизм, оператор, функционал.

Введем ряд обозначений. Если задана функция f, которая определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, то

1 область определения функции f (множество X) обозначается D(f);

2 область значений функции f (множество Y) обозначается E(f).

Две функции f1, f2 считаются совпадающими или равными, если они имеют одну и ту же область определения X и на любом элементе x ∈ X значения f1(x), f2(x) этих функций совпадают. В этом случае пишут f1 = f2.

**Способы задания функции**. Наиболее часто встречаются следующие три способа задания функций: табличный, графический и аналитический. При табличном способе задания функции составляется таблица, в которой указывается ряд значений аргумента и соответствующих значений функции. При графическом способе задания дается график функции, при этом ее значения, соответствующие тем или иным значениям аргумента, непосредственно находятся из этого графика. При аналитическом способе задания функция определяется с помощью аналитического выражения, т. е. с помощью формулы, указывающей, какие действия надо совершить над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции. Часто функция задается только с помощью аналитического выражения (формулы), без каких-либо дополнительных условий. В таких случаях под областью определения функции понимают совокупность всех тех значений аргумента, для которых это выражение имеет смысл и приводит к действительным значениям функции.

**Некоторые свойства функции.** Пусть дана функция y = f(x). К основным свойствам функции относятся монотонность, периодичность, четность и ограниченность.

1 Монотонность

Функция y = f(x) называется **неубывающей** на X, если ∀x1, x2 ∈ X : x1 > x2 => f(x1) ≥ f(x2).

Функция y = f(x) называется **возрастающей** на X, если ∀x1, x2 ∈ X : x1 > x2 => f(x1) > f(x2).

Функция y = f(x) называется **невозрастающей** на X, если ∀x1, x2 ∈ X : x1 > x2 => f(x1) ≤ f(x2).

Функция y = f(x) называется **неубывающей** на X, если ∀x1, x2 ∈ X : x1 > x2 => f(x1) < f(x2).

Возрастающая или убывающая функция называется *строго монотонной*.

2 Периодичность

Функция y = f(x) называется **периодической с периодом T** ≠ 0, если f(x + T) = f(x), ∀x ∈ X.

Наименьший положительный период, если он существует, называется *основным периодом*.

Функция, не являющаяся периодической, называется **апериодической**.

3 Чётность

Функция y = f(x) называется **нечётной**, если справедливо равенство f (-x) = -f(x), ∀x ∈ X.

Функция y = f(x) называется **чётной**, если справедливо равенство f(-x) = f(x), ∀x ∈ X.

Если не выполняется ни одно из этих равенств, то функция называется *функцией общего вида*.

4 Ограниченность

Функция y = f(x) называется **ограниченной сверху** в области определения X, если существует такое положительное число M, что выполняется неравенство f(x) ≤ M, ∀x ∈ X.

Функция y = f(x) называется **ограниченной снизу**, если существует такое число M, что для всех x из области определения функции выполняется неравенство f(x) ≥ M, ∀x ∈ X.

Функция ограничена, если она ограничена и сверху, и снизу.

**Основные типы функций.** Существует всего пять типов элементарных функций:

1 Степенные

К этому типу относятся линейные, квадратичные, кубические, 1/x, √x, n√x. Все они содержат выражения вида xa.

2 Показательные

Это функции вида y = ax.

3 Логарифмические

y = loga x.

4 Тригонометрические

В их формулах присутствуют синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

5 Обратные тригонометрические

Содержат arcsin x, arccos x, arctg x, arcctg x.

Элементарными они называются, потому что из них, как из элементов, получаются все остальные.

**Производная функции**

Производная функции y = f(x) в точке x0​ — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

Механический смысл производной: Мгновенная скорость прямолинейного движения материальной точки в любой момент времени t есть производная от пути s по времени v(t)=s′(t). Ускорение прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени: a(t)=s′′(t).

Геометрический смысл производной: Значение производной функции в некоторой точке есть угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке. Уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x0​ имеет вид:

y = f(x0) + f′(x0)⋅(x−x0).

Прямая, проходящая через точку M0(x0, f(x0)), перпендикулярно касательной, называется нормалью.

**Сложная функция.**

Сложная функция — это функция от функции. Если величина y является функцией от u, то есть у = f (u), а и, в свою очередь, функцией от х, то есть u = h(х), то у - сложная функция от х, то есть y = f (h(x)), определённой для тех значений х, для которых значения h(х) входят в множество определения функции f (u).

В этом определении f — внешняя функция, h(x) — внутренняя функция или промежуточный аргумент, х — окончательный аргумент.

Теорема. Производная сложной функции равна производной по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной. То есть, если y = f (u), u = u(x) , т.е y = f (u(x)) , то y′x = y′u ⋅ u′x - формула производной сложной функции.

Критерии дифференцируемости. Сложная функция будет дифференцируема, если обе функции f и h дифференцируемы в соответствующих точках, что обеспечивает возможность применения формулы производной сложной функции.

**Интегралы.**

Интеграл функции представляет собой обобщение понятия суммы. Он позволяет находить площадь под графиком функции и является одним из основных понятий математического анализа. Определённый интеграл функции f(x) на интервале [a, b] обозначается как:

Геометрический смысл интеграла: Геометрически интеграл можно интерпретировать как площадь под графиком функции f(x) между точками a и b на оси X. Если функция принимает отрицательные значения на этом интервале, площадь будет считаться с отрицательным знаком.

**Основные свойства интегралов**:

1. **Линейность**:

где k — константа.

1. **Аддитивность**:

для любого c из интервала [a, b].

1. **Неотрицательность**: Если f(x) ≥ 0 на [a, b], то:

*Неопределённый интеграл:* Неопределённый интеграл функции f(x) обозначается как:

где F(x) — первообразная функции f(x), а C — произвольная постоянная. Этот интеграл показывает все функции, производные которых равны f(x).

**Методы интегрирования**:

**1 Метод подстановки**: Используется для сложных функций. Позволяет упростить интеграл, заменяя одну переменную другой.

2 **Метод интегрирования по частям**: Применяется, когда интеграл можно представить в виде произведения двух функций. Формула выглядит так:

3 **Замена переменной**: Позволяет преобразовать интеграл с помощью новой переменной, что может упростить вычисления.

**Связь с производными**: Интеграция и дифференцирование являются обратными процессами. Это выражается в **теореме Фундаментальной теории анализа**, которая утверждает, что если F — первообразная функции f, то:

**Свойства периодических функций:**

1 Сумма нескольких T-периодических функций есть функция T-периодическая.

2 Если f(x) T-периодическая функция, то f(ax) T/a-периодическая функция.

3 f(x) — T-периодическая функция, интегрируемая на интервале [a, b]. Тогда

## 1.2 Ортогональная система функций

Пространство называется линейным, если в нем введены операции сложения элементов и умножения элементов на число, удовлетворяющие ряду аксиом (коммутативность, ассоциа­тивность и др.).

В линейном пространстве вводятся понятия линейной зависимо­сти и размерности.

Линейное пространство называется евклидовым, если для его элементов введена операция скалярного умноже­ния, ставящая в соответствие каждой паре элементов и число (,), удовлетворяющее условиям:

1 (Ɐ ∈ ) (Ɐ∈ ) [(, ) = (, )],

1. (Ɐ ∈ ) (Ɐ ∈ ) (Ɐ ∈ R) [(, ) = (, )],
2. (Ɐ ∈ ) (Ɐ ∈ ) (Ɐ ∈ ) [( + , ) = (, ) + (, )],
3. (Ɐ ∈ С) [(, ) 0]; [(, ) = 0] ⬄ ( = 0).

Две функции f и g называются ортогональными на отрезке [a, b], если .

Система ненулевых функций {0, 1, 2, ...} (конечная или бесконечная) называется ортогональной на отрезке [a, b], если на этом отрезке ортогональны любые две функции этой системы, то есть при i != j.

Тот факт, что f и g ортогональны на [a; b] записывают в виде (f, g) = 0 на [a; b].

Если интеграл , то функция f называется нормированной на [a, b].

Если все функции ортогональной системы {ψi} нормированы, то такая система {ψi} называется ортонормированной.

Следует ввести понятие нормы. Пусть f(x) ∈ ℜ[a; b], тогда нормой функции f называется число

.

В евклидовом пространстве следует ввести норму следующим образом

.

Лемма 1. (Римана) Пусть функция f(x) абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале (a; b). Тогда

.

## 1.3 Ряд Фурье

**Гармоники** — это синусоидальные функции, которые описывают периодические колебания.

При решении многих задач приходится решать задачу о разложимости сложной периодической функции на более простые гармоники, т. е. функции вида

y = A sin(ω x + ),

где А, ω, — постоянные, причём |А| называют амплитудой, а ω, —соответственно частотой и начальной фазой.

Учитывая то, что

A sin(ωx+ ) = A (cosωx sin+ sinωx cos),

гармонику можно представить в виде

A sin(ωx+ ) = a cosωx+ b sinωx,

(1.1)

где a = A sin, b = A cos.

Пусть теперь задана некоторая функция

f(x) = a cosωx+ b sinωx,

(1.2)

тогда, положив и sin = a/A, cos = b/B, используя (1.1), получим f(x) = A sin(ωx + ). Другими словами, всякая функция вида (1.2) является простой гармоникой.

Из сказанного выше следует, что если необходимо разложить некоторую функцию f(x) в сумму простых гармоник (что равносильно сумме функций вида (1.2)), то эта функция должна быть периодической.

Для 2π периодических функций частоты следует выбрать так, чтобы каждая из гармоник имела число 2π своим периодом, т. е. чтобы n · 2π/ω = 2π, n ∈ Z или n = ω. Это говорит о том, что в разложении должны быть простые гармоники с целыми частотами.

Таким образом, возникает необходимость представить 2π-периодическую функцию в виде ряда, состоящего из простейших гармоник:

Все слагаемые в этой формуле имеют период 2π. Очевидно, что простая гармоника имеет период Т = 2π/ω.

Систему функций

{1, cosx, sinx, cos 2x, sin 2x, ...}

называют **тригонометрической системой**.

**Тригонометрическим рядом** называется функциональный ряд вида

, где an, bn, x ∈ R.

(1.3)

Очевидно, что если тригонометрический ряд сходится поточечно к некоторой функции f(x), x ∈ R, то функция f(x) будет 2π периодической.

Определение. Пусть f ∈ ℜ[−π; π]. Тригонометрический ряд (1.3) называется **рядом Фурье** функции f, если коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам:

(1.4)

n = 1, 2, 3, ....

Здесь и ниже через ℜ[−π; π] обозначено множество интегрируемых по Риману функций на отрезке [a; b].

Коэффициенты (1.4) называют коэффициентами Фурье функции f.

Тот факт, что тригонометрический ряд (1.3) является рядом Фурье для функции f ∈ ℜ[−π; π] записывается в следующем виде:

f ∼

(1.5)

Следует отметить здесь, что осторожный знак ∼ (тильда) в соотношении (1.5) является не знаком равенства, а знаком сопоставления.

Теорема 1.1 (об ортогональности тригонометрической системы) Тригонометрическая система функций ортогональна на отрезке [−π; π].

Замечание 1. (о комплексной форме записи ряда Фурье) Пусть f ∈ ℜ[−π; π] и ряд (1.3) является рядом Фурье этой функции, тогда имеет место комплексная форма записи ряда Фурье:

, где , n ∈ Z.

Действительно, если воспользоваться формулой Эйлера , то легко получить, что , . Ряд (1.3) запишется в виде:

(1.9)

## 1.4 Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле. Принцип локализации Римана

Пусть функция f ∈ ℜ[−π; π] и 2π периодична на R. Пусть Sn(x) =

— частичные суммы ряда Фурье функции f. Подставляя в суммы Sn(x) значения коэффициентов Фурье an и bn, получим

Функцию (u) = называют ядром Дирихле. Таким образом, имеет место интегральное представление частичной суммы ряда Фурье

Свойства ядра Дирихле.

1 Функцию (u) можно считать непрерывной на R.

2 |(u)| < n + 1/2.

3 (−u) = (u) для всех u ∈ R.

4 (u + 2π) = (u) для всех u ∈ R.

5 |(u)| < π/(2|u|) для 0 < |u| < π.

Теорема 1.2 (принцип локализации Римана). Пусть функция f ∈ ℜ[−π; π] и 2π периодична на R. Тогда сходимость или расходимость ряда Фурье функции f(x) в точке x0 зависит только от поведения функции f(x) в окрестности точки x0.

# 2 История исследования рядов Фурье

Ряды Фурье, названные в честь французского математика Жана-Батиста Жозефа Фурье (1768—1830), представляют собой важный инструмент в математическом анализе. Фурье внес значительный вклад в изучение тригонометрических рядов, основываясь на предварительных исследованиях таких математиков, как Леонард Эйлер, Жан Лерон д’Аламбер и Даниил Бернулли. Основная мотивация для создания ряда Фурье заключалась в решении уравнения теплопроводности, которое Фурье описал в своем труде "Трактат о распространении тепла в твердых телах", опубликованном в 1822 году. В этом произведении он представил анализ, который в дальнейшем стал основой для понимания ряда Фурье.

Идея Фурье заключалась в том, чтобы представить сложные источники тепла как суперпозицию простых синусоидальных и косинусных волн, что позволяло записать решение уравнения теплопроводности в виде линейной комбинации собственных решений, известных как собственные решения. Это открытие стало знаковым в математике, поскольку Фурье смог продемонстрировать, что произвольная непрерывная функция может быть представлена в виде тригонометрического ряда. Первоначально, в 1807 году, он объявил об этом перед Французской академией, но его работы получили широкую известность лишь позже.

Важно отметить, что до Фурье известные решения уравнения теплопроводности ограничивались простыми случаями, когда источник тепла вел себя предсказуемо, например, в виде синусоидальных волн. Фурье же открыл путь к более сложным моделям, расширив область применения тригонометрических рядов на широкий спектр математических и физических задач. Современные ученые, такие как Петер Густав Лежён Дирихле и Бернхард Риман, после Фурье уточнили и формализовали его результаты, что сделало их более точными.

Ряды Фурье начали активно развиваться еще в XVIII веке в работах Д. Бернулли, Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, которые исследовали разложение периодических сигналов. В 1829 году Дирихле, развивая идеи Фурье, установил и строго доказал достаточные условия разложимости функции в тригонометрический ряд, что стало важным шагом в развитии теории.

В приложениях рассмотрение тригонометрических рядов преж­де всего связано с задачей представления данного движения, опи­сываемого уравнением у = p(t), в виде суммы простейших гармо­нических колебаний, часто взятых в бесконечно большом числе.

Как известно, простое гармоническое колебание описывается функцией

x(t) = A\*sin(ωt + φ),

(2.1)

где ω- частота, связанная с периодом Т соотношением

ω = 2π/T.

При наложении двух гармонических колебаний

x1 = А1 / cos(ω1\*t+ φ1)

и

x2 = А2 / cos(ω2\*t+ φ2),

имеющих разные частоты и амплитуды, результирующее колебание не является гармоническим.

Его можно представить в следующей форме:

х = х1 + x2 = A(t) \* cos[ω1\*t+ φ(t)],

где

A2(t) = A21 + A22 + 2\*A1\*A2 \* cos[ψ(t)+ φ],

tg φ(t) = (А1 \* sin(φ1) + А2 \* sin(ψ(t))) / (А1 \* cos(φ1) + А2 \* cos(ψ(t)))

и

ψ(t) = (ω2 – ω1) \* t + φ2.

С физической точки зрения такое представление результирую­щего негармонического колебания имеет смысл только при наложе­нии гармонических колебаний, частоты которых достаточно близ­ки. В этом случае A(t) и φ(t) - медленно меняющиеся функции времени, а колебательный процесс называется биением.

Величина A (t) периодически изменяется в пределах от |A1 – A2| до A1 + А2 с частотой

υб = |υ2 – υ1| = 1 / (2π \* |ω2 – ω1|),

называемой частотой биения.

Если же сложить несколько величин вида:

x1 = А1 \* sinωt,

x2 = А1 \* sin2ωt,

x3 = А1 \* sin22ωt,

…

xn = Аn \* sin2n-1ωt,

(2.2)

то получим в результате периодическую функцию, существенно отличающуюся от каждой из величин вида (2.2) (рис. 2.1).

При сложении величин из бесконечного ряда, составленного по типу (2.2), эффект отличия результирующей периодической функции от синусоиды проявится еще больше.

Возникает обратная задача: представить определенную перио­дическую функцию f(t) с периодом Т в виде суммы конечного или бесконечного числа величин вида (2.1).

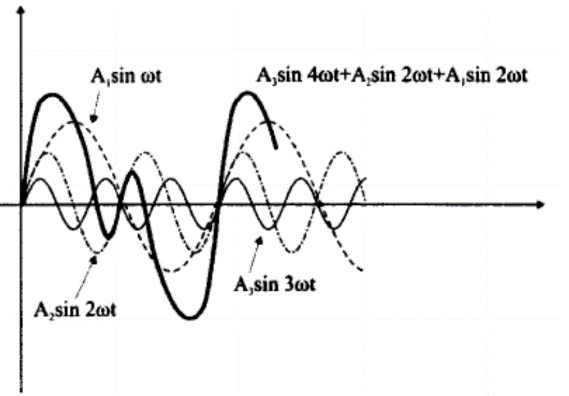


Рисунок 2.1

# 3 Виды сходимости ряда Фурье

Существует несколько основных видов сходимости рядов Фурье, среди которых выделяются поэлементная сходимость, сходимость в среднем, равномерная сходимость и сходимость в смысле квадратичной интегрируемости. Каждый из этих видов имеет свои критерии и особенности, что делает их актуальными для различных математических и прикладных задач. Например, поэлементная сходимость позволяет оценивать поведение частичных сумм ряда, в то время как сходимость в среднем и по Лебегу более строго определяет условия, при которых ряд сходится к заданной функции.

Эта глава создаст необходимую основу для дальнейшего анализа и исследования применений рядов Фурье в различных областях науки и техники.

## 3.1 Поэлементная сходимость

1. 2π-периодические функции

Вопрос о сходимости ряда Фурье в точке x — это вопрос существования конечного . Для его решения мы воспользуемся понятием кусочно–дифференцируемой функции.

2π-периодическая функция f(x) называется кусочно–дифференцируемой на отрезке [−π, π], если можно указать разбиение −π = c0 < c1 < · · · < ck = π этого отрезка на конечное число частей [cm, cm+1], m = 0, 1, ..., k− 1, для которого выполнены следующие условия:

1) функция f(x) дифференцируема внутри каждой части [cm, cm+1];

2) во всех точках cm, m = 0, 1, ..., k − 1 существуют конечные левые и

правые пределы f(cm − 0) и f(cm + 0);

3) во всех точках cm, m = 0, 1, ..., k−1 существуют конечные обобщённая левая производная и обобщённая правая производная .

Изображение выглядит как линия, снимок экрана, белый

Автоматически созданное описание

Теорема 1.1 (о сходимости тригонометрического ряда Фурье). Если 2π-периодическая и кусочно–дифференцируемая на отрезке [−π, π] функция f(x) принадлежит классу ℜ[−π, π], то тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке x к значению .

Следствие. При выполнении условий теоремы в каждой точке непрерывности x тригонометрический ряд сходится к значению функции в этой точке: .

Замечание. В точке x = −π по теореме s0 = (f(−π + 0) + f(−π − 0)) / 2. Так как , то s0 = (f(−π + 0) + f(π − 0)) / 2. Аналогично в точке x = π.

2. Непериодические функции

Пусть функция f(x) кусочно–дифференцируема на отрезке [a, b] и f ∈ ℜ[a, b]. Возможны следующие три варианта.

1) [a, b] = [−π, π]. Если выполняется равенство f(−π) = f(π), то функцию f можно 2π-периодически продолжить на всю числовую ось. Если равенство не выполняется, то 2π-периодического продолжения в этом случае не получится.

2) [a, b] ⊂ [−π, π]. Продолжаем функцию f(x) линейным образом на отрезок [−π, π] так, чтобы f(−π) = f(π). При этом сохранится кусочно– дифференцируемость и данный случай сведется к предыдущему случаю.

3) [a, b] ⊃ [−π, π], т.е. b − a > 2π. В этой ситуации рассматривают функции с произвольным периодом.

3. Случай, когда функция четная/нечетная

Пусть f(x) — чётная, 2π-периодическая функция и f ∈ ℜ[−π, π]. Построив для неё ряд Фурье, используя свойства интегралов по симметричному промежутку от чётной и нечётной функций, получится следующее:

,

*.*

(3.1.1)

Пусть f(x) — нечётная, 2π-периодическая функция и f ∈ ℜ[−π, π]. Ряд Фурье для нее выглядит так:

,

*.*

(3.1.2)

Разложения вида (3.1.1) называют разложением по косинусам, вида (3.1.2) — разложением по синусам.

4. Полупериод

Пусть f(x) ∈ ℜ[0, π]. Если продолжить функцию f(x), x ∈ [0, π] чётным образом на [−π, π], то сохранится кусочно–дифференцируемость и f(−π) = f(π). Следовательно, разложение примет вид (3.1.1).

Кроме того, к отрезку [0, π] будет применима теорема 1.1. Пример представлен на рисунке 3.1.

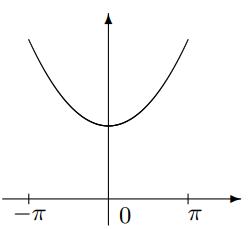


Рисунок 3.1

Аналогично можно продолжить функцию f(x) на отрезок [−π, π] нечётным образом.

Кусочно–дифференцируемость функции в этом случае сохранится, но f(−π) != f(π). Тогда придется переопределить f(x) либо в точке x = −π, либо в точке x = π с тем, чтобы f(−π) = f(π) и можно будет применить теорему 1.1 к отрезку [0, π].

Таким образом, функцию, заданную на полупериоде, можно разложить в ряд как по синусам, так и по косинусам.

5. Произвольный период

Пусть f(x) ∈ ℜ[−ω, ω] — периодическая функция с периодом T = 2ω. Для построения ряда Фурье необходимо совершить замену: , при которой из x ∈ [−ω, ω] следует, что t ∈ [−π, π]. Обозначим . Тогда (t) ∈ ℜ[−π, π] — периодическая функция с периодом T = 2π. Разложим (t) в ряд Фурье:

После обратной замены коэффициенты Фурье для произвольного периода примут вид

а разложение в ряд Фурье будет следующее:

Пусть f ∈ ℜ [a, b]. Если b − a > 2π, то можно подобрать ω такое, что [a, b] ⊂ [−ω, ω]. Затем продолжить f(x) с отрезка [a, b] на отрезок [−ω, ω] так, чтобы выполнялось равенство f(−ω) = f(ω). А далее 2ω-периодически продолжить функцию на всю числовую прямую R.

## 3.2 Сходимость в среднем

Пусть задан функциональный ряд

(3.2.1)

— его частичная сумма.

1) пусть — среднее арифметическое частичных сумм S1, S2, . . ., Sn. Если имеет поточечный предел f(x) для всех x ∈ X, то говорят, что функциональный ряд (3.2.1) сходится поточечно в средне арифметическом частичных сумм Sn(x) на X к f(x);

2) если , то говорят, что ряд (3.2.1) сходится равномерно в средне арифметическом частичных сумм Sn(x) на X к f(x);

3) пусть Х = [a; b] и Un(x) ∈ ℜ[a; b], тогда, если , то говорят, что ряд (3.2.1) сходится на [a; b] к f(x) в средне квадратичном (в смысле средне квадратичного уклонения).

Тот факт, что ряд (3.2.1) сходится в средне квадратичном к f(x), можно записать в виде

.

Пусть функция f ∈ ℜ[−π; π] и

(3.2.2)

где

(3.2.3)

и  частичная сумма ряда (3.2.2). Дальше нас будут интересовать свойства частичных сумм Sn(x) и коэффициентов Фурье (3.2.3).

**Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье**

Наряду с частичной суммой Sn(x) рассмотрим тригонометрический многочлен

.

(3.2.4)

Поставим задачу: среди всех тригонометрических многочленов sn(x) найти тот, который даёт наименьшее квадратичное уклонение от функции f ∈ ℜ[−π; π]. Более подробно эта постановка выглядит так: найти коэффициенты α0, α1, …, αn, β1, β2, …, βn так, чтобы величина была минимальна. Оказывается, этим свойством обладают коэффициенты Фурье функции f(x).

Теорема 1.1. (экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье) Пусть Sn(x) есть частичные суммы ряда Фурье функции f ∈ ℜ[−π; π], а sn(x) — произвольный тригонометрический многочлен (3.2.4), тогда для любого фиксированного n ∈ N

или, что эквивалентно,

Дрказательство.

**Неравенство Бесселя для тригонометрической системы и его следствия**

Теорема 2. (неравенство Бесселя) Пусть f ∈ ℜ[−π; π], тогда имеет место неравенство Бесселя

Доказательство.

Следствие 1. Пусть f ∈ ℜ[−π; π], тогда для коэффициентов Фурье

(3.2.5)

Доказательство.

Следствие 2. Пусть f ∈ ℜ[−π; π], тогда для любого отрезка [a; b] ⊂ [−π; π] имеем:

а)

б) .

(3.2.6)

Доказательство.

## 3.3 Равномерная сходимость

Теорема 1. (о равномерной сходимости ряда Фурье) Пусть функция f(x) 2π периодична и дифференцируема в каждой точке x ∈ R, и пусть функция f′ (x) ∈ ℜ[−π; π]. Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно на R к функции f(x).

Доказательство.

Теорема 3.2 Пусть f(x) непрерывна на R, и существует не более конечного числа точек {xk} (k = 1, 2, . . ., m), −π ≤ x1 < x2 < ... < xn ≤ π таких, что для всех x ∈ (−π; π) \ существует конечная производная f ′ (x), причем f ′ ∈ ℜ[−π; π]. Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно на отрезке [−π; π] к функции f(x).

Доказательство.

## 3.4 Сходимость в смысле квадратичной интегрируемости

Теорема 1. Пусть f ∈ ℜ[−π; π]. Тогда имеет место равенство Парсеваля-Стеклова (свойство замкнутости тригонометрической системы)

.

(3.4.1)

Доказательство.

Теорема 2. Если функция f ∈ ℜ[−π; π] и 2π периодична, то ряд Фурье функции f сходится в средне квадратичном к f(x), т. е.

.

Доказательство.

# 4 Критерии сходимости рядов Фурье

## 4.1 Критерий Коши

Критерий Коши для сходимости рядов Фурье основан на идее о том, что ряд сходится, если для любой заданной точности существует такое число N, что для всех n, m > N сумма разностей частичных сумм ряда становится меньше заданной точности. Формально, ряд Sn(x) сходится к функции f(x), если:

где Sn(x) — частичная сумма ряда Фурье. Этот критерий полезен для проверки сходимости при анализе поведения частичных сумм.

**Доказательство.**

Для доказательства критерия Коши можно воспользоваться тем фактом, что если ряд сходится, то разности частичных сумм могут быть сделаны произвольно малыми. Если Sn(x) не сходится, то существует ε, для которого не удастся найти N, удовлетворяющее условию Коши. Это противоречит предположению о сходимости, что подтверждает корректность критерия Коши.

Критерий Коши позволяет не только выявить сходимость, но и предлагает способ практического вычисления предела ряда. Например, если для функции f(x) можно найти такое N, что для всех n, m > N выполняется , то мы можем быть уверены, что Sn(x) сходится к f(x).

## 4.2 Критерий Дирихле

Критерий Дирихле предоставляет условия для сходимости ряда Фурье, особенно когда речь идет о периодических функциях. Он утверждает, что если функция f(x) является ограниченной и имеет конечное число разрывов на отрезке, а также её интеграл по любому периоду конечен, то ряд Фурье сходится к f(x) в точках, где функция непрерывна.

Формально, если f(x) удовлетворяет следующим условиям:

1. f(x) ограничена на отрезке.
2. Число разрывов функции на отрезке конечное.

3 существует.

то ряд Фурье Sn(x) будет сходиться к f(x) в точках, где f непрерывна.

Критерий Дирихле учитывает поведение функции в окрестности разрывов и обеспечивает сходимость даже в присутствии ограниченных разрывов. Это важно, поскольку многие практические функции, изучаемые в физике и инженерии, могут иметь разрывы, но остаются ограниченными.

Доказательство этого критерия основывается на том, что если функция ограничена и имеет конечное число разрывов, то её среднее значение в пределах любого периода не будет бесконечным. Это позволяет утверждать, что ряд Фурье будет сходиться в точках, где функция непрерывна, так как влияние разрывов будет минимальным.

Критерий Дирихле находит широкое применение в анализе различных функций, включая периодические сигналы в теории сигналов и обработке данных, где важно учитывать существование разрывов и их влияние на сходимость.

## 4.3 Критерий Бесовича

Критерий Бесовича является более строгим критерием сходимости, который позволяет оценить сходимость рядов Фурье для более широкого класса функций. Он утверждает, что если функция f(x) является интегрируемой по Риману и удовлетворяет следующему условию:

при

то ряд Фурье Sn(x) сходится к функции f(x) почти всюду. Этот критерий полезен для анализа функций с особыми свойствами, такими как функции с медленно убывающими значениями.

Критерий Бесовича является мощным инструментом в анализе, поскольку он позволяет работать с функциями, которые могут иметь сложные и непредсказуемые свойства. Он особенно полезен для функций, которые имеют медленно убывающие значения или колебания.

Доказательство критерия Бесовича включает анализ поведения интеграла функции на больших промежутках. Условие, что среднее значение функции стремится к нулю, указывает на то, что функция не может вносить значительный вклад в конечный интеграл, что позволяет гарантировать сходимость ряда Фурье.

Критерий Бесовича широко используется в современных исследованиях, особенно в области гармонического анализа, где функции могут быть сложными и не всегда удовлетворять более простым критериям сходимости.

# 5 Примеры и приложения

## 5.1 Примеры рядов Фурье

Примеры реализованы при помощи maple2021.

*Пример 1. Поэлементная сходимость.*

Рассмотрим функцию f(x) = x на интервале [−π, π]. Ряд Фурье этой функции будет сходиться поэлементно. Листинг кода представлен ниже:

f := x -> x;

a0 := simplify(int(f(x), x = -Pi .. Pi)/Pi);

an := simplify(int(f(x)\*cos(n\*x), x = -Pi .. Pi)/Pi);

bn := simplify(int(f(x)\*sin(n\*x), x = -Pi .. Pi)/Pi);

Sm := m -> 1/2\*a0 + sum(an\*cos(n\*x) + bn\*sin(n\*x), n = 1 .. m);

limit\_Sm := limit(Sm(m), m = infinity);

В результате получается, что предел частичной суммы равен изначальной функции, поэтому можно сказать, что функция сходится поэлементно.

*Пример 2. Сходимость в среднем.*

Продолжим рассматривать функцию f(x) = x на интервале [−π, π]. Ряд Фурье этой функции будет сходиться в среднем. Листинг кода представлен ниже:

sigma\_n := sum(Sm(k), k = 1 .. N)/N;

limit(sigma\_n, N = infinity);

Получаем, что предел стремится к x.

*Пример 3. Равномерная сходимость.*

Рассмотрим непрерывную функцию f(x) = x2 на интервале [−π, π].

f := x -> x^2;

a0 := simplify(int(f(x), x = -Pi .. Pi)/Pi);

an := simplify(int(f(x)\*cos(n\*x), x = -Pi .. Pi)/Pi);

bn := simplify(int(f(x)\*sin(n\*x), x = -Pi .. Pi)/Pi);

Sm := m -> 1/2\*a0 + sum(an\*cos(n\*x) + bn\*sin(n\*x), n = 1 .. m);

limit(Sm(m) - f(x), m = infinity);

Получаем, что функция сходится равномерно.

Пример 4. Сходимость в смысле квадратичной интегрируемости.

Рассмотрим функцию f(x) = 1 на интервале [−π,π].

f := 1;

a0 := simplify(int(f(x), x = -Pi .. Pi)/Pi);

an := simplify(int(f(x)\*cos(n\*x), x = -Pi .. Pi)/Pi);

bn := simplify(int(f(x)\*sin(n\*x), x = -Pi .. Pi)/Pi);

Sm := m -> 1/2\*a0 + sum(an\*cos(n\*x) + bn\*sin(n\*x), n = 1 .. m);

limit(int((f - Sm(m))^2, x = -Pi .. Pi), m = infinity);

Полученный предел равен 0. Значит функция сходится в смысле квадратичной интегрируемости.

## 5.2 Применение в различных областях

Ряды Фурье являются одним из краеугольных камней анализа периодических функций и находят широкое применение в различных областях науки и техники. Их способность представлять сложные функции как суммы синусоидальных компонент делает их незаменимыми в ряде дисциплин. В этом пункте мы рассмотрим основные области применения рядов Фурье, их роль и влияние на развитие соответствующих наук.

**Теория сигналов**

В теории сигналов ряды Фурье используются для анализа и обработки сигналов. Сигналы можно разложить на гармонические составляющие, что позволяет исследовать их частотный спектр. Это особенно важно в таких приложениях, как:

*Анализ частот*: Ряды Фурье помогают определить, какие частоты присутствуют в сигнале, что полезно для фильтрации и повышения качества передачи данных.

*Модуляция и демодуляция*: В радиосвязи и телекоммуникациях использование рядов Фурье позволяет модулировать и демодулировать сигналы, что обеспечивает их эффективную передачу и прием.

*Обработка изображений*: Применение преобразования Фурье позволяет анализировать и обрабатывать изображения, включая сжатие и улучшение качества.

**Механика и инженерные науки**

В механике и инженерных науках ряды Фурье применяются для решения задач, связанных с колебаниями и волнами:

*Анализ механических колебаний*: Ряды Фурье позволяют описывать колеблющиеся системы, такие как пружины и маятники, разлагая их движения на гармонические составляющие. Это упрощает анализ динамики систем и позволяет предсказывать их поведение.

*Волновая теория*: В области акустики и электромагнетизма ряды Фурье используются для анализа волновых процессов, что позволяет моделировать распространение звука и света в различных средах.

**Квантовая механика**

В квантовой механике ряды Фурье играют ключевую роль в описании состояния системы:

*Квантовые состояния*: В квантовой механике волновые функции могут быть представлены в виде рядов Фурье, что позволяет анализировать их свойства и поведение частиц.

*Решение уравнения Шредингера*: Методы, основанные на рядах Фурье, применяются для нахождения решений уравнения Шредингера, что является основным уравнением в квантовой механике.

**Теория управления**

Ряды Фурье также находят применение в теории управления, где они используются для анализа и проектирования систем управления:

*Анализ устойчивости*: Применение рядов Фурье позволяет исследовать устойчивость систем, а также их реакцию на различные входные сигналы, что критически важно для разработки надежных управляющих систем.

*Оптимизация управления*: Используя разложения Фурье, можно оптимизировать алгоритмы управления, что позволяет повышать эффективность и надежность работы систем.

**Математическая физика**

В математической физике ряды Фурье используются для решения различных уравнений, таких как уравнения теплопроводности и уравнения волн:

*Решение дифференциальных уравнений*: Ряды Фурье позволяют находить решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, что делает их важным инструментом в математической физике.

*Моделирование физических явлений*: С их помощью можно моделировать такие процессы, как распространение тепла и волн, что позволяет лучше понимать физические явления.

**Обработка данных и статистика**

В области обработки данных и статистики ряды Фурье играют важную роль в анализе временных рядов и сигналов:

*Анализ временных рядов*: Ряды Фурье используются для анализа и прогнозирования временных рядов, что находит применение в экономике, финансах и других областях, где важен анализ данных во времени.

*Сглаживание данных*: Применение преобразования Фурье позволяет сглаживать данные и устранять шумы, что улучшает качество анализа.

**Компьютерная графика**

В компьютерной графике ряды Фурье используются для создания и обработки изображений:

*Сжатие изображений*: Алгоритмы, основанные на преобразовании Фурье, применяются для сжатия изображений, что позволяет уменьшить их размер без значительной потери качества.

*Графические эффекты*: Ряды Фурье применяются для создания различных графических эффектов, таких как размытие и фильтрация изображений.

**Заключение**

Ряды Фурье представляют собой мощный инструмент, который находит применение во множестве областей науки и техники. Их способность разлагать сложные функции на простые гармонические составляющие делает их незаменимыми в анализе и обработке сигналов, механике, квантовой механике, теории управления, математической физике, обработке данных и компьютерной графике. Понимание и использование рядов Фурье открывает новые горизонты для научных исследований и практических приложений, что подчеркивает их важность в современном мире.

# 

# 6 Проблемы и трудности сходимости

Несмотря на развитые теории и методы, на практике встречаются многочисленные проблемы и трудности, связанные со сходимостью.

В данном разделе будут рассмотрены основные проблемы, возникающие при анализе сходимости функциональных рядов. Обсуждение охватит такие аспекты, как условия, обеспечивающие сходимость, примеры функций, для которых сходимость не выполняется, а также методы, позволяющие оценить и улучшить сходимость. Понимание этих вопросов имеет важное значение для применения теории функциональных рядов в различных областях математики и её приложений.

## 6.1 Парадокс Гиббса

Парадокс Гиббса является одним из наиболее известных феноменов, связанных со сходимостью рядов Фурье. Он проявляется при разложении функции с разрывом в ряд Фурье и характеризуется осцилляциями, которые не исчезают даже при увеличении числа членов ряда.

При разложении функции, такой как квадратная волна, в ряд Фурье, наблюдаются колебания, которые достигают максимума, превышающего значение функции в точках разрыва. Например, в случае квадратной волны, которая принимает значения 1 и -1, осцилляции могут превышать эти значения, создавая "пики", которые остаются даже при увеличении количества членов ряда. Это явление демонстрирует, что хотя ряд Фурье может сходиться к функции в среднем, точные значения функции могут быть значительно искажены в точках разрыва.

Парадокс Гиббса имеет важные последствия в различных областях, таких как теория сигналов и обработка изображений. Он подчеркивает, что на практике, даже если ряд сходится, его значения могут не отражать истинное поведение функции. Это приводит к проблемам в приложениях, где требуется высокая точность, например, в цифровой обработке сигналов.

Для уменьшения эффекта парадокса Гиббса можно использовать фильтрацию сигналов или сглаживание функций, что позволяет снизить влияние резких изменений и, как следствие, уменьшить осцилляции. Такие подходы включают использование оконных функций или сглаживающих фильтров.

## 6.2 Особенности сходимости для непрерывных функций

Важным аспектом сходимости рядов Фурье является различие в поведении для непрерывных функций.

Теорема. Пусть функции f1(x) и f2(x) непрерывны на [−π; π], и

, k = 1, 2.

— ряды Фурье функций f1(x) и f2(x). Тогда f1(x) ≡ f2(x) на [−π; π] тогда и только тогда, когда , n = 0, 1, 2, ..., , n = 1, 2, 3, .... (6.2.1)

Доказательство данной теоремы основано на свойствах коэффициентов Фурье. Если две функции равны на интервале, то их интегралы по косинусам и синусам также должны быть равны. Это означает, что коэффициенты Фурье для этих функций должны совпадать.

**Необходимость:** Предположим, что f1(x) ≡ f2(x). Тогда для любого n:

что приводит к равенству коэффициентов и аналогично для bn​.

**Достаточность:** Предположим, что ​ и . Тогда, подставляя эти коэффициенты, получаем, что ряды Фурье для f1 и f2​ совпадают, что означает их равенство на интервале.

Это свойство критично в теории рядов Фурье и позволяет утверждать, что если два ряда Фурье совпадают, то соответствующие функции также совпадают, что имеет важные приложения в анализе и обработке данных.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполненной работы была исследована сходимость рядов Фурье, рассмотрены основные критерии сходимости и связанные с ними проблемы. Анализ показал, что ряд Фурье является мощным инструментом для представления периодических функций, однако его сходимость может вызывать определенные трудности и парадоксы, такие как парадокс Гиббса.

Критерии сходимости, включая критерии Коши, Дирихле и Бесовича, предоставляют разнообразные подходы к оценке сходимости рядов, позволяя определить условия, при которых ряды сходятся к функциям. Также рассмотрены особенности сходимости для непрерывных функций и проанализированы проблемы, возникающие при вычислении рядов, что подчеркивает необходимость внимательного подхода к выбору методов анализа.

Понимание этих аспектов является критически важным для применения теории рядов Фурье в различных областях математики и её приложениях, таких как обработка сигналов, теория колебаний и численные методы. Решение проблем сходимости и точностью позволяет обеспечивать надежность результатов и повышать качество анализа.

В заключение, полученные результаты подчеркивают значимость теории рядов Фурье в современном математическом анализе и её широкие возможности в практических приложениях. Дальнейшие исследования в этой области могут сосредоточиться на разработке более эффективных методов анализа и устранения проблем со сходимостью, что откроет новые горизонты для использования рядов Фурье в сложных математических и инженерных задачах.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Волков В. А. Ряды Фурье. Интегральные преобразования Фурье и Радона : учебно-методическое пособие.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 544 с.

[3] Ющенко Д.П., Якубович О.В. Математический анализ. Ряды Фурье. Гомель 2008.

[4] Латыпова Н.В., Тучинский Л.И Ряды Фурье : учебно-методическое пособие.

[5] Семенчук Н.П., Сендер Н.Н. Ряды Фурье. Интегралы Фурье. Преобразование Фурье: учебно-методическое пособие. Брест: БрГУ, 2011. 42 с.

[6] Нуссбаумер Г. Быстрое Преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток.

[7] Шнейдер В. Е. и др. Краткий курс высшей математики. Учеб. пособие для втузов. Москва: "Высш. школа", 1972.

[8] Смирнов В.И. Курс высшей математики в 5-ти томах. Том 4, часть 2. Москва, 1981.

[9] Кандидов В.П. и др. Дискретное преобразование Фурье. Учебное пособие. Москва: физический факультет МГУ, 2019.